2010年　東大数学　文系第2問

$f(x+1) = c\int_0^1 (3x^2+4xt) f'(t)\, dt$

xの関数。

tで積分。インテグラルの中では、xは定数。

$= 3cx^2\int_0^1 f'(t)\,dt + 4cx\int_0^1 t f'(t)\,dt$

x^2の項　　xの項

$f(x) = 2x+a$, $f'(t) = 2t+a$ なので

$$\begin{cases} \int_0^1 f'(t)\,dt = \int_0^1 (2t+a)\,dt = \left[t^2+at\right]_0^1 = 1+a \\ \int_0^1 t f'(t)\,dt = \int_0^1 (2t^2+at)\,dt = \left[\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{2}at^2\right]_0^1 = \frac{2}{3}+\frac{1}{2}a \end{cases}$$

また、$f(x+1) = (x+1)^2 + a(x+1) + b$

$= x^2 + (a+2)x + a+b+1$ より

(与式)

$\Leftrightarrow x^2 + (a+2)x + a+b+1 = 3c(a+1)x^2 + 4c\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}a\right)x$

これが x の恒等式なので

$$\begin{cases} 1 = 3c(a+1) & \cdots ① \\ (a+2) = 4c\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}a\right) & \cdots ② \\ a+b+1 = 0 & \cdots ③ \end{cases}$$

(積)=0 を作るため、工夫する。

この連立方程式を解くと、

①と②の両辺の積をとり

$3c(a+1)(a+2) = 1 \times 4c\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}a\right)$

$c\left\{3(a+1)(a+2) - 4\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}a\right)\right\} = 0$　◀積 $=0$

$c\left(3a^2+7a+\frac{10}{3}\right) = 0$

$c(3a+2)(3a+5) = 0$

よって、$c=0$ または $a=-\frac{2}{3}$ または $a=-\frac{5}{3}$

(i) $c=0$ のとき、

①は $1=0$ となり不適。

(ii) $a=-\frac{2}{3}$ のとき、

①より $c=1$

③より $b=-\frac{1}{3}$

(iii) $a=-\frac{5}{3}$ のとき、

①より $c=-\frac{1}{2}$

③より $b=\frac{2}{3}$

以上より、$(a, b, c) = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right), \left(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{2}\right)$